Издания Центра проблем развития образования
Белорусского государственного университета
www.charko.narod.ru

УДК 378.4
ББК 74.58 У 90

Идея университета: парадоксы самоописания

Сборник материалов третьей международной научно-практической конференции "Университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению" (29-30 апреля 2002 г., Минск)
Белорусский государственный университет.
Центр проблем развития образования;
Под ред. М.А.Гусаковского, А.А.Полонникова.
Мн.: БГУ, 2002. - 244 с.

ISBN 985-6582-33-4

В сборнике представлены статьи участников работы двух конференций: международной научной конференции «Идея университета: авторитет классики и вызов современности» (18-19 октября 2001 г.) и философско-психологической секции третьей международной научно-практической конференции «Университетское образование: от эффективного преподавания к эффективному учению» (29-30 апреля 2002 г.).

Данное издание предназначено для преподавателей высших школ, ученых, аспирантов, слушателей курсов повышения квалификации, методистов и специалистов аппарата управления сферы образования.

СОДЕРЖАНИЕ

Психология образования

“ТЕРАПЕВТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ” ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ Л.ВИТГЕНШТЕЙНА В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ РЕФЛЕКСИИ УНИВЕРСИТЕТСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Ербовенко-Риттер Валерий Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета БГУ

Философское грехопадение в попытке найти какой-нибудь единый источник бытия, единое начало всего сущего, по мнению известного литератора и философа Льва Шестова, совершил "философский Адам" – Фалес. Таинственные события его жизни и философского учения тоже можно отнести к области вымыслов, однако, именно ему профессиональные математики обязаны становлением математического знания как науки.

Классический рационализм в многообразии мнений и подходов пытался найти тот единственный подход, который является истинным. Современный постмодернизм расширяет философские представления об образовательной свободе, отождествляя идею плюрализма с неклассической рациональностью. Оставляя в стороне общие рассуждения о том, насколько это полезно в целом для образовательной практики, попытаемся осмыслить в таком духе феномен научного математического знания. Начиная с пифагорейцев, философы пытались уяснить предмет математики и осознать, что она исследует во внешнем мире. Во времена Сократа “математик” традиционно был также “философом”, и эта тенденция продержалась вплоть до Рене Декарта и Готфрида Лейбница. Именно интерес к математике и ее логическим основам привел в философию выдающегося австрийского мыслителя XX века Людвига Витгенштейна (1889-1951). “Мой идеал – определенная сдержанность”, которая подобна храму, служащему “пристанищем для страстей”, – говорил он.

Одним из оснований обращения к столь специальному предмету как философия математики, которой занимается не так уж и много людей, интересующихся философией и математикой, является значение математики, как для философии, так и для естествознания. Существенное отличие современной философии от математики состоит в том, что в ней не существует признанных всеми философскими школами “результатов”. В то же время, хотя современная математика является уникальной областью человеческой деятельности, у неспециалистов довольно туманные представления о ней, далекие от действительности. Одной из причин такого явления известный математик профессор М.М.Постников считает отсутствие четкого концептуального определения математики как науки. Поскольку абстрактная математика, в отличие, например, от естественных наук, может изучать “самое себя”, то различие между “математикой” и “нематематикой” даже глубже, чем между гуманитарным и естественным знанием.

* * *

Читая в Кембридже цикл лекций по “основаниям математики”, Людвиг Витгенштейн с самого начала мотивировал правомерность заниматься этими проблемами ему – не математику. Современные “философы математики”, даже если они не в состоянии самостоятельно доказать или проанализировать простейшие выражения начального общеобразовательного курса высшей математики, пытаются тем не менее делать туманные предсказания относительно путей развития математики и самонадеянно давать “ценные рекомендации” профессионалам. Однако Витгенштейн, даже имея к тому времени репутацию выдающегося философа, тем не менее, специально подчеркнул, что будет стремиться избегать такого подхода без вмешательства в профессиональные дела математиков, поскольку собирается говорить об интерпретации, а не предлагать новой интерпретации математических символов. “Кроме того, – утверждает профессор А.Ф.Грязнов, – Витгенштейн предупреждал, что в своем лекционном курсе он не собирается рассуждать об основаниях математики как особом разделе математической науки. Скорее он будет говорить о роли слова “основания” во фразе “основания математики”, ибо мы делаем математику с помощью понятий" [1, 67]. Предостерегая от недооценки роли языка в математике, Людвиг Витгенштейн обращал особое внимание на употребление понятий в математике.

Для всех, кто интересуется философскими проблемами математики, в том числе для профессиональных математиков и философов науки, небезынтересно мнение по любому вопросу в этой области такого выдающегося специалиста по математической логике как профессор В.А.Успенский. Различие между "возведением" нового здания и "уяснением" оснований проектируемого здания, по его авторитетному мнению, нигде так четко не проявляется, как в математике. Поэтому вполне естественно постоянное обращение Витгенштейна к математике для иллюстрации своих философских взглядов. "Математические сущности, пребывающие в мире чистых форм, служат, – по Успенскому, – идеальным полем для философских спекуляций" [2, 86]. Критически оценивая вклад философских работ Витгенштейна в основания математики, В.А.Успенский отмечает, что если понимать основания математики как специфическую математическую дисциплину, то тогда "влияние Витгенштейна на основания математики прослеживается с трудом". Если трактовать термин "основания математики" более объемно, охватывающим философию математики или, по крайней мере, – подчеркивает В.А.Успенский, –"ощутимо с ней пересекающимся", то тогда уже можно говорить и о вкладе Витгенштейна. А как часть общей философской концепции Витгенштейна, его "философия математики" в равной мере разделяет и все ее достоинства, и все ее недостатки.

"Философ должен так крутиться и вертеться, чтобы увернуться от математических проблем, – утверждал Людвиг Витгенштейн, – а не осаждать одну из них – ту, что вроде бы следует решить, прежде, чем можно будет двигаться дальше" [3, 166]. Переход науки к знаковым формам выражения способствовал созданию направления логического позитивизма в философии, стремившегося совместить эмпиризм с логическим анализом. Это течение возникло в начале 20-х годов XX века на основе Венского кружка и объединяло группу математиков и философов, собиравшихся для обсуждения логических и философских вопросов науки. Одна из важнейших проблем логического позитивизма в осмыслении знаково-символических средств состояла в изучении зависимости способов познания от типа языка. Одним из своих предшественников они считали Людвига Витгенштейна, который к тому времени уже прославился своим "Логико-философским трактатом" (1921). Логические позитивисты полагали, что они развивают научную философию, считая, что именно философия призвана обеспечить науку надежными основаниями. Глава Венского кружка Мориц Шлик (1882-1936) в работе "Поворот в философии" (1930-1931), представляющей по существу манифест этого движения, писал: "Наука занимается истинностью предложений, а философия – тем, что они на самом деле означают. Содержание, душа и дух науки состоят, естественно, в том, что именно в действительности означают ее предложения" [4,. 31]. Поэтому, считал он вслед за Витгенштейном, в задачу философии не входит формулирование предложений, поскольку "наделение их смыслом" не может быть осуществлено с помощью самих предложений. Мориц Шлик считал, что "великий исследователь – всегда философ" и мечтал о тех временах, когда отпадет необходимость обсуждать особые "философские проблемы" и можно будет ясно и осмысленно, по-философски говорить о любых проблемах.

* * *

Немецкий математик с мировым именем Рихард фон Мизес (1883-1958) на своих лекциях, отличавшихся отточенностью изложения, любил делать философские отступления и заботился о том, чтобы его курсы воспринимались не как вполне законченные, а как часть растущей науки. Как философ он стоял на позициях просвещенного позитивизма. Позитивизм как философское направление основано на принципе, согласно которому подлинное "положительное" знание может быть получено лишь конкретными науками или в результате их синтетического объединения. Важнейший этап в развитии позитивизма определялся идеей, впервые высказанной Людвигом Витгенштейном, и существенно развитой Венским кружком. Речь идет о точке зрения, согласно которой, все содержательные утверждения можно разделить на две группы. К первой относятся те, которые описывают факты, поддающиеся экспериментальной проверке. Вторая группа содержит словесные утверждения, верные или неверные, которые не зависят от эксперимента. Верные утверждения второй группы называют тавтологиями, а неверные – противоречиями. "Предложения логики суть тавтологии", – утверждал Витгенштейн в "Логико-философском трактате".

Утверждение является тавтологическим, если оно не зависит от экспериментов и, следовательно, ничего не говорит о действительности, а только представляет собой некоторую переформулировку произвольно установленных логических правил на основе изучения определений и вытекающих из них предложений. "Теоремы логики и чистой математики, а также и любые другие аксиоматически сформулированные теории, – писал профессор Р.Мизес в фрагменте из книги "Позитивизм: опыт исследования человеческой мысли" (1960), – являются, согласно представлениям Л.Витгенштейна, "тавтологическими", то есть они ничего не говорят о реальности и не представляют собой ничего, кроме произвольно выбранных по нашему желанию лингвистических правил" [5, 18]. Следует отметить, что новое значение слова "тавтология" отягощено его старым смыслом, согласно которому под "тавтологией" понимались предложения, которые без ущерба для смысла можно опустить как излишнее многословие или пустую болтовню. Поэтому, у математиков, привыкших к особенностям формулирования собственной терминологии, тезис о "тавтологическом" характере их теорем вызывал естественные возражения. Кроме того, для демонстрации тавтологического и непротиворечивого характера математического утверждения требуется "доказательство" и, в этом смысле, неразрешенные математические гипотезы и проблемы, вообще говоря, не классифицируются таким образом.

Объяснение специфики математического доказательства является одной из центральных тем витгенштейновской философии математики. Доказательство Витгенштейн рассматривает как последовательность предложений, с помощью которых получается образ определенного вида "математического эксперимента". В математике, считает он, в некотором смысле как бы экспериментируют с различными "образцами вычислений", некоторые из которых становятся "парадигматическими" в силу своей полезности. "То, что показывает математическое доказательство, – убеждает Витгенштейн, – представляется внутренним отношением и не подлежит сомнению" [3, 172]. Хотя в задачу философии не входит пояснение или уточнение специальных математических понятий, что вполне по силам только профессиональным математикам, он все же пытается привлечь внимание своих читателей к тому, что доказательства бывают разными и более того каждое новое доказательство в математике "расширяет понятие доказательства". В духе сократического метода вопросы Витгенштейна иногда бывают интереснее его ответов. Например, он спрашивает: "Что общего у математического предложения и математического доказательства, из-за чего они оба называются математическими? ... Что математического есть в недоказанном предложении (аксиоме)? Что общего между ним и математическим доказательством?".

В этом же ряду стоят его размышления о том, что устанавливает смысл предложения, и если доказательство найдено, то изменяется ли смысл. "Действительно ли смысл, суть математического предложения становятся ясными, как только мы можем следовать за доказательством?" [3, 173]. Последнее можно пояснить следующим образом. Доказательство требуется, если утверждение теоремы не очевидно. Если же доказываемое предложение не может быть ни истинным, ни ложным, то доказательство служит для установления смысла доказываемого предложения. С такой ситуацией математики неожиданно встретились при доказательстве "континуум-гипотезы". В тоже время доказательство позволяет формулировать новые языковые правила, когда новые задачи не поддаются обобщению на них старых методов или проведению аналогий, игнорирующих качественные различия. Доказательства, по Витгенштейну, влияют на использование языка, поскольку создают новые языковые правила. Например, доказательство "основной теоремы алгебры" связано с созданием нового исчисления, поскольку решение этой теоремы зависело от введения символики комплексных чисел. По мнению доктора философских наук З.А.Сокулер, Витгенштейн убеждает нас в том, что "математические предложения – это не идеализированные описания эмпирической реальности и не образы особой умопостигаемой реальности", а "грамматические нормы, управляющие нашими описаниями реальности" [6, 77]. Хотя для него в любом конкретном случае остается неопределенным, почему мы придерживаемся определенных теорий или методов, зависящих то ли от устройства реальности, то ли от наших привычек, определяемых "социально принятыми правилами".

Довольно длительное время математика была совокупностью высказываний относительно некоторого класса объектов, не имеющего никакого структурного порядка, и высказывание принималось за истинное как интуитивно очевидное, или как доказанное на основе интуитивно очевидных высказываний. После того, как было осознано, что интуитивные доказательства часто приводят к серьезным ошибкам, стал развиваться аксиоматический метод с целью ограничения обращения к интуитивной очевидности, основная тенденция которого состояла в стремлении доказать как можно больше математических предложений. Недостижимым идеалом этой точки зрения было доказательство истинности каждого предложения, принимаемого за такое, поскольку каждое предложение доказывается на основе других, а эти другие – на основе дальнейших и так далее, если, в конце концов, где-то не прервать это процедуру.

Возможно поэтому, как иронично заметил Витгенштейн: "Стены иногда украшают изречениями, но не теоремами механики". Два основных принципа, которым следует и современная математика, явились результатом компромисса между реальными возможностями и недостижимым идеалом. Согласно первому из них, математическая дисциплина начинается с небольшого количества предложений-аксиом, и, в соответствии со вторым, в рамках этой дисциплины предложение становится истинным, когда оно доказано с помощью аксиом или предложений, доказанных раньше.

Выдающийся польский математик и логик Альфред Тарский (1901-1984) считал, что "вплоть до конца девятнадцатого столетия понятие доказательства имело главным образом психологический характер" [7, 142]. По существу, на аргументы, применяемые при доказательствах, не накладывалось никаких ограничений, кроме интуитивной убедительности, хотя уже и начала ощущаться потребность в анализе самого понятия "доказательства". Такой анализ был проделан логиками, так что, начиная с работ крупнейшего немецкого математика Готлоба Фреге (1848-1925), который первым в явной форме ввел в математическую логику кванторы и систематически использовал их, было определено новое понятие "формального доказательства". Осуществив дедуктивное аксиоматическое построение математической логики, и применив ее в качестве метода обоснования арифметики, Фреге представил математику как продолжение логики. И, тем не менее, за исключением некоторых элементарных теорий, Альфред Тарский делает вывод "о несовпадении понятий истинности и доказуемости" относительно всех формализованных теорий, имеющий почти универсальный характер. "Тот факт, что философские следствия этого результата негативны по своему характеру, нисколько не уменьшает его значения", – утверждает он [7, 145]. Даже в области математики понятие доказуемости, вообще говоря, не замещает понятия истинности. Однако именно доказательство по-прежнему остается единственным методом в любой математической теории, используемым для утверждения истинности ее предложений.

* * *

"Важнейшей особенностью почти всех абстрактных множеств, встречающихся в математике, – подчеркивает профессор А.В.Архангельский, – является их бесконечность. Это связано с характерной чертой математики – идеализацией рассматриваемых ситуаций" [8, 6]. После открытия парадоксов канторовской теории бесконечных множеств у философов и у части математиков возникло убеждение, что и в математических теориях могут оказаться скрытые противоречия, даже если они пока и не обнаружены. В связи с этим, определенный период философии математики определялся исследованиями по основаниям математики с целью преодолеть парадоксы теории множеств и запретить "виновные" в этом способы рассуждений. В излюбленной афористической манере Людвиг Витгенштейн, подчеркивая различие функций и проблем математиков и философов, повторяет, что "в математике есть только математические трудности, а вовсе не философские". Философ может вмешиваться только тогда, когда у математиков возникает "чувство дискомфорта" в работе. Поэтому и задача философии математики, по Витгенштейну, является в сущности "терапевтической", способной вносить успокоение, а в противоречиях и парадоксах их теорий они разберутся сами. "Зачем математике нужно обоснование?! Я полагаю, – говорит он, – оно нужно ей не более, чем предложениям, повествующим о физических предметах или же о чувственных впечатлениях, – нужен их анализ" [3, 180]. Многие профессионально работающие математики, не связанные напрямую с "математическими проблемами оснований", вполне могут согласиться с Витгенштейном в том, что эти основания в столь же малой степени лежат для них в основе математики, в какой нарисованная скала поддерживает нарисованную на ней крепость.

Парадоксы в "основаниях математики" никак не отразились на устойчивости ее "продвинутых" теорий. Классические исследования Альфреда Тарского показали, что естественный язык плюс обычная двузначная логика уже образуют противоречивую систему, поскольку в двузначной логике из противоречия может следовать все что угодно, а в естественном языке есть, например, пользующийся наибольшей известностью из нематематических парадоксов, так называемый, парадокс лжеца. Эта антиномия имеет древнее происхождение и ее приписывают знаменитому греческому логику Эвбулиду. В классическом варианте парадокса лжеца речь идет о высказывании "Это утверждение ложно". Если высказывание истинно, то истинно то, что оно утверждает и, следовательно, оно ложно. Если высказывание ложно, то ложно то, что оно утверждает и, следовательно, оно истинно. Тарский отмечал, что парадокс лжеца вместе с некоторыми противоречиями, открытыми на рубеже XX века, все еще анализируется и обсуждается, оказывая существенное влияние на развитие современной логики. Скептически оценивая затею подвести под математику "особо прочный фундамент", Людвиг

Витгенштейн считал, что она порождена неверным философским образом математики как особого, исключительно надежного знания, поскольку "если что-то ненадежно в самой математике, то и любое основание будет столь же ненадежным".

Древнегреческий мыслитель Фалес Милетский (ок. 625-547 до нашей эры), посетив в молодости Египет, где в школах Мемфиса и Фив изучал разные науки, возвратившись на родину, основал в Милете собственную философскую школу. Именно с его деятельностью связывают истоки греческой геометрии, которая первоначально имела дело с неразработанными интуитивными концепциями "точки" и "прямой". Только спустя приблизительно 300 лет автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике античный математик Евклид (ок. 365 – ок. 300 до нашей эры) дал этим концепциям аксиоматическое истолкование. Биографические сведения об его жизни и деятельности крайне скудны, хотя известно, что он родом из Афин, а его научная деятельность протекала в Александрии, где он и создал математическую школу. Греческая геометрия стараниями Евклида и его последователей сделалась значительно более строгой благодаря тому, что стала полагаться только на логический вывод из явно сформулированных предложений. Хотя классические аксиомы Евклида и служили продолжительное время образцом точных наук, они все же являлись трудно уловимым смешением кажущихся определений и точных постулатов, и, вообще говоря, не были независимы друг от друга. Аналогичный процесс в теории множеств выдающихся немецких математиков занял уже не 300, а всего лишь 35 лет.

Если немецкий математик Георг Кантор (1845-1918) "сыграл роль Фалеса" – роль основателя и первооткрывателя теории множеств, исходя из интуитивных представлений, то его ученик Эрнест Цермело (1871-1953) "сыграл роль Евклида", создав в 1908 году аксиоматическую теорию множеств. На самом деле, как Евклид являлся "одним из многих в длинном ряду греческих геометров – творцов "евклидовой" геометрии", так и Цермело был лишь "первым из полдюжины крупных имен – создателей аксиоматической теории множеств" [9, 46]. В абстрактной теории множеств особое положение занимает одна аксиома, которую часть математиков с трудом принимали на веру, как в свое время и известный постулат о параллельных в геометрии. Мы имеем в виду аксиому выбора, согласно которой, если является какой-либо совокупностью непустых множеств { , , …}, то тогда существует множество, состоящее из одного произвольно выбранного элемента из , одного элемента из и по одному элементу от всех остальных множеств из совокупности . Трудности, связанные с этой аксиомой, порождены широтой, которая придается "любой" совокупности множеств , хотя большинству людей аксиома выбора, впрочем, как и постулат о параллельных, кажется интуитивно правдоподобной. Речь идет о том, что для бесконечной совокупности множеств по существу нет способа составить новое множество поочередной выборкой элементов из всех членов заданной совокупности. В определенном смысле, признание аксиомы выбора – это акт веры.

* * *

Знаменитый американский математик, удостоенный Филдсовской премии (1966) за решение континуум-гипотезы, Поль Коэн и его коллега Ройбен Херш характеризуют полезность этой аксиомы следующим образом: "Оказывается, из невинной с виду аксиомы выбора следуют некоторые неожиданные и чрезвычайно сильные выводы. Например, мы получаем возможность использовать индуктивное построение для доказательства утверждений об элементах в любом множестве ..." [9, 47]. Поначалу казалось, что созданная в конце XIX века Георгом Кантором теория множеств может стать универсальным фундаментом для всех теоретических разделов математики. Однако вскоре выяснилось, что этот теоретико-множественный фундамент выглядит не вполне надежным, в связи с обнаруженными внутренними трудностями новой теории. Наиболее существенной из этих проблем была неполнота теории множеств. Даже проведенная Эрнестом Цермело и усовершенствованная несколько лет спустя Абрагамом Френкелем (1891-1965) формальная аксиоматизация "наивных" принципов рассуждений Кантора, избавив ее от известных парадоксов, не позволила дать ответ на многие простые вопросы о множествах, например, выяснить, существуют ли неизмеримые по Лебегу множества действительных чисел. Для этого требовались новые принципы или аксиомы, важнейшей из которых оказалась аксиома выбора, введенная Цермело. Теория множеств Цермело-Френкеля, несмотря на все критические замечания, – самая фундаментальная на сегодня, и на ее основе строятся основные разделы современного математического и функционального анализа и других дисциплин.

Вопрос об истинности или ложности каких-либо положений в математической "языковой игре", по мнению

Людвига Витгенштейна, можно даже проигнорировать, поскольку куда важнее их полезность или применимость. Известный историк математики доктор физико-математических наук Ф.А.Медведев заключает, что, пройдя длинный и сложный путь от "неосознанных и скрытых применений" в математических рассуждениях XIX века, а затем – через бурную полемику в начале XX века, после явной формулировки Цермело, аксиома выбора все же была признана вполне респектабельным, важным и неизбежным элементом современных теоретических исследований. Выяснению роли этой аксиомы в математике посвящено немало работ, основной из которых считают статью известного польского математика Вацлава Серпинского (1882-1969) "Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе" (1918). Например, в популярном стандартном курсе профессора Г.М.Фихтенгольца "Основы математического анализа" словосочетание "аксиома выбора" вообще не встречается, однако, большинство содержащихся в нем утверждений в той или иной степени связано с этой аксиомой, хотя может быть и опосредовано. Уместно также отметить, что существуют многочисленные нетривиальные эквиваленты или "метаморфозы" аксиомы выбора, что, впрочем, и не удивительно, если вспомнить о подобном феномене, сопровождавшем аксиому параллельности в геометрии.

Диапазон мнений об аксиоме Цермело довольно широк. Сомнения и споры вызывали в основном следующие два принципиальных момента. Во-первых, речь идет о реализации выбора бесконечной последовательности элементов, во-вторых, выбор элемента из произвольного неупорядоченного множества – это тоже логическая проблема. Одной из основных парадигм математики является идеал однозначности. Аксиома выбора, вообще говоря, противоречит этому идеалу, поскольку выбираемые с ее помощью множества или соответствующие функции определяются не единственным образом. Основная трудность состоит в том, что хотя их существование и принимается, однако, не дается способа предпочтения чего-либо одного. Говоря о выборах с помощью аксиомы Цермело, создатель знаменитой Московской математической школы академик Н.Н.Лузин (1883-1950) утверждал, что ее сторонник "выбирает и грезит по-своему, и нет не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но и быть согласным даже с самим собой" [10, 73]. Тем не менее, по свидетельству академика П.С.Александрова, позже он же говорил об этой аксиоме: "Если бы только кто-нибудь знал, что это за вещь!"

Философское значение математики в том и состоит, что по существу она "конструирует" методы, которые, учитывая ее многообразие и множественность, вообще говоря, могут иметь дело с любым содержанием. Хотя содержательной математике свойственна множественность в интерпретации ее теорий, она не связана напрямую с метафорическим содержанием, присущим гуманитарному научному знанию. Тем не менее, Людвиг Витгенштейн находил своеобразное сходство философского исследования в математике с эстетическим. В истории философии и культуры XX века он был в широком смысле слова философом жизни. Несмотря на глубину душевных и нравственных страданий Людвига Витгенштейна, – вспоминал его ученик Норман Малкольм, – в конце своей жизни он достойно сказал: "У меня была прекрасная жизнь".

Литература

1. Грязнов А.Ф. Л.Витгенштейн о методологических вопросах математического знания // Вестник Московского университета. Сер. 7. Философия. – 1987, № 4. – С. 63-74.
2. Успенский В.А. Витгенштейн и основания математики // Вопросы философии. – 1998, № 5. – С. 85-97.
3. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Он же. Философские работы. Ч.2. – М.: Гнозис, 1994. – С. 1-206.
4. Шлик М. Поворот в философии // Аналитическая философия: Избранные тексты. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – С. 28-33.
5. Мизес Р. Математические постулаты и человеческое мышление // Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С. 3-43.
6. Сокулер З.А. Людвиг Витгенштейн и его место в философии XX в. – Долгопрудный: Аллегро-Пресс, 1994. – 172 с.
7. Тарский А. Истина и доказательство // Вопросы философии. – 1972, № 8. – С. 136-145.
8. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 112 с.
9. Коэн П.Дж., Херш Р. Неканторовская теория множеств // Природа. 1969, № 4. – С. 43-55.
10. Медведев Ф.А. Метаморфозы аксиомы выбора // Вопросы истории естествознания и техники. – 1983, № 4. – С. 69-76.